Chương II. QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH, ỨNG DỤNG TRONG KINH TẾ

TS. Hà Văn Hiếu

Đại học Kinh Tế - Luật, Tp. Hồ Chí Minh

Ngày 25 tháng 5 năm 2020

VÍ DỤ 3.3 TRANG 151

Công ty kinh doanh xăng dầu có 2 kho:

- kho I chứa tối đa 20 tấn xăng,
- kho II chứa tối đa 40 tấn.

Công ty chuyên cung cấp cho ba trạm A, B, C. Chi phí cho việc cung ứng xăng (cước vận chuyển, phí giao nhận, v.v.) được cho bởi bảng sau:

	Trạm A	Trạm B	Trạm C
Kho I	5	4	7
Kho II	6	5	5

Đơn vị: triệu đồng/tấn.

Nhu cầu tiêu thụ xăng của trạm A là 20 tấn, trạm B là 15 tấn, trạm C là 15 tấn. Lập kế hoạch cung ứng tốt nhất mà vẫn đủ xăng cho các trạm.

VÍ DỤ 3.3 TRANG 151

- Gọi lượng xăng chuyển từ kho I, kho II đến các trạm A, B, C là
$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}.$$

VÍ DỤ 3.3 TRANG 151

- Gọi lượng xăng chuyển từ kho I, kho II đến các trạm A, B, C là

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}.$$

- Để đảm bảo đủ nhu cầu cho các trạm thì

$$\begin{aligned} x_{1A} + x_{2A} &= 20, \\ x_{1B} + x_{2B} &= 15, \\ x_{1C} + x_{2C} &= 20. \end{aligned}$$

- Do trạm I, II có dung lượng lần lượt là 20 và 40 tấn nên

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20,$$
$$x_{2B} + x_{2B} + x_{2C} \leq 40$$

- Do trạm I, II có dung lượng lần lượt là 20 và 40 tấn nên

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20,$$
$$x_{2B} + x_{2B} + x_{2C} \leq 40$$

- Hàm chi phí là

$$5x_{1A} + 4x_{1B} + 7x_{1C} + 6x_{2A} + 5x_{2B} + 5x_{2C}$$

- Do trạm I, II có dung lượng lần lượt là 20 và 40 tấn nên

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20,$$
$$x_{2B} + x_{2B} + x_{2C} \leq 40$$

- Hàm chi phí là

$$5x_{1A} + 4x_{1B} + 7x_{1C} + 6x_{2A} + 5x_{2B} + 5x_{2C}$$

- Đơn nhiên,

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C} \leq 0.$$

VÍ DỤ 3.3 TRANG 151

Bài toán của chúng ta trở thành

$$5x_{1A} + 4x_{1B} + 7x_{1C} + 6x_{2A} + 5x_{2B} + 5x_{2C} \to \min$$

Bài toán của chúng ta trở thành

$$5x_{1A} + 4x_{1B} + 7x_{1C} + 6x_{2A} + 5x_{2B} + 5x_{2C} \to \min$$

Với điều kiện

$$\begin{aligned}
&x_{1A} + x_{2A} = 20,\\
&x_{1B} + x_{2B} = 15,\\
&x_{1C} + x_{2C} = 20,\\
&x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20,\\
&x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 40,\\
&x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C} \leq 0.
\end{aligned}$$

VÍ DỤ 3.3 TRANG 151

Bài toán của chúng ta trở thành

$$5x_{1A} + 4x_{1B} + 7x_{1C} + 6x_{2A} + 5x_{2B} + 5x_{2C} \to \min$$

Với điều kiện

$$\begin{aligned}
&x_{1A} + x_{2A} = 20,\\
&x_{1B} + x_{2B} = 15,\\
&x_{1C} + x_{2C} = 20,\\
&x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 20,\\
&x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 40,\\
&x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C} \leq 0.
\end{aligned}$$

Một bài toán dạng như thế này được gọi là một bài toán QHTT (Linear Programming).

LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS (LPP) - LỊCH SỬ

1. Khởi đầu với việc giải các phương trình và bất phương trình của *Fourier*. [năm 1827]

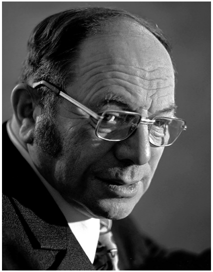
LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS (LPP) - LỊCH SỬ

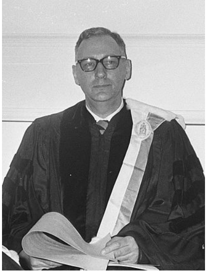
1. Khởi đầu với việc giải các phương trình và bất phương trình của *Fourier*. [năm 1827]

2. Bài toán được đưa ra một cách đầy đủ bởi *Leonid Kantorovich* (Sô Viết), và bởi *T. C. Koopmans* (Hà Lan-Mỹ) [năm 1939]. (chia sẻ giải Nobel kinh tế 1975).

LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS (LPP) - LỊCH SỬ

1. Khởi đầu với việc giải các phương trình và bất phương trình của *Fourier*. [năm 1827]
2. Bài toán được đưa ra một cách đầy đủ bởi *Leonid Kantorovich* (Sô Viết), và bởi *T. C. Koopmans* (Hà Lan-Mỹ) [năm 1939]. (chia sẻ giải Nobel kinh tế 1975).





THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

1. *George B. Dantzig* đưa ra thuật toán đơn hình khi nghiên cứu bài toán QHTT phục vụ cho không quân Hoa Kỳ [1946-1947].

1. *George B. Dantzig* đưa ra thuật toán đơn hình khi nghiên cứu bài toán QHTT phục vụ cho không quân Hoa Kỳ [1946-1947].
2. Thuật toán đơn hình (simplex method) sau này được hoàn thiện bởi *John von Neumann* [1948].

1. *George B. Dantzig* đưa ra thuật toán đơn hình khi nghiên cứu bài toán QHTT phục vụ cho không quân Hoa Kỳ [1946-1947].
2. Thuật toán đơn hình (simplex method) sau này được hoàn thiện bởi *John von Neumann* [1948].
3. Bài toán QHTT có thể được giải với độ phức tạp tính toán *"Polynomial time"* bởi *Leonid Khachiyan* vào năm 1979.

THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

1. *George B. Dantzig* đưa ra thuật toán đơn hình khi nghiên cứu bài toán QHTT phục vụ cho không quân Hoa Kỳ [1946-1947].
2. Thuật toán đơn hình (simplex method) sau này được hoàn thiện bởi *John von Neumann* [1948].
3. Bài toán QHTT có thể được giải với độ phức tạp tính toán *"Polynomial time"* bởi *Leonid Khachiyan* vào năm 1979.
4. *Interior-point methods* được phát triển bởi *Narendra Karmarkar* năm 1978 để giải bài toán QHTT.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

Ta có các khái niệm

- Hàm mục tiêu.
- Hệ các ràng buộc.
- Ràng buộc dấu.
- Vectơ của ràng buộc.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} & x + y \leq 5 \\ & 2x + y \leq 10 \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 0 \\ & y \leq 4 \end{aligned}$$

Một hệ ràng buộc được gọi là **độc lập tuyến tính** nếu hệ vectơ tương ứng với nó ĐLTT.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \le 5 \\ &2x + y \le 10 \\ &x \ge 1 \\ &y \ge 0 \\ &y \le 4 \end{aligned}$$

Một hệ ràng buộc được gọi là **độc lập tuyến tính** nếu hệ vectơ tương ứng với nó ĐLTT.

- Hai ràng buộc sau ĐLTT

$$\begin{aligned} &x + y \le 5 \\ &2x + y \le 10 \end{aligned}$$

- Hai ràng buộc sau không ĐLTT

$$\begin{aligned} &y \ge 0 \\ &y \le 4 \end{aligned}$$

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \le 5 \\ &2x + y \le 10 \\ &x \ge 1 \\ &y \ge 0 \\ &y \le 4 \end{aligned}$$

- **Một phương án** là một bộ (a, b) thỏa mãn tất cả các ràng buộc.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- **Một phương án** là một bộ (a, b) thỏa mãn tất cả các ràng buộc.
- **Ví dụ.** Bộ (1,4) là một PA.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} x + y &\le 5 \\ 2x + y &\le 10 \\ x &\ge 1 \\ y &\ge 0 \\ y &\le 4 \end{aligned}$$

- **Một phương án** là một bộ (a, b) thỏa mãn tất cả các ràng buộc.
- **Ví dụ.** Bộ (1,4) là một PA.
- Vectơ (2,3) là một PA.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \le 5 \\ &2x + y \le 10 \\ &x \ge 1 \\ &y \ge 0 \\ &y \le 4 \end{aligned}$$

- **Một phương án** là một bộ (a, b) thỏa mãn tất cả các ràng buộc.
- **Ví dụ.** Bộ (1,4) là một PA.
- Vectơ (2,3) là một PA.
- Vectơ (0,5) không phải là một PA, vì nó không thõa ràng buộc số 3.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned}
& x + y \leq 5 \\
& 2x + y \leq 10 \\
& x \geq 1 \\
& y \geq 0 \\
& y \leq 4
\end{aligned}$$

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- Một PA được gọi là **chặt** đối với một ràng buộc nếu khi thế PA đó vào ràng buộc ta được dấu "=".

QHTT - CÁC THUẬT NGỮ

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} x + y &\leq 5 \\ 2x + y &\leq 10 \\ x &\geq 1 \\ y &\geq 0 \\ y &\leq 4 \end{aligned}$$

- Một PA được gọi là **chặt** đối với một ràng buộc nếu khi thế PA đó vào ràng buộc ta được dấu "=".
- PA (1,4) là chặt đối với ràng buộc $x + y \leq 5$, nhưng không chặt đối với ràng buộc $2x + y \leq 10$.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- Một PA được gọi là **chặt** đối với một ràng buộc nếu khi thế PA đó vào ràng buộc ta được dấu "=".
- PA (1,4) là chặt đối với ràng buộc $x + y \leq 5$, nhưng không chặt đối với ràng buộc $2x + y \leq 10$.
- PA (5,0) là chặt đối với (chỉ) các ràng buộc sau:

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &y \geq 0 \end{aligned}$$

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned}
&x + y \leq 5\\
&2x + y \leq 10\\
&x \geq 1\\
&y \geq 0\\
&y \leq 4
\end{aligned}$$

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned}
&x + y \leq 5\\
&2x + y \leq 10\\
&x \geq 1\\
&y \geq 0\\
&y \leq 4
\end{aligned}$$

- **Một PA tốt hơn** là PA làm cho hàm mục tiêu đạt gần tới mục tiêu hơn. Nghĩa là nó làm cho hàm mục tiêu lớn hơn (đối với bài toán max) hoặc nhỏ hơn (đối với bài toán min).

QHTT - CÁC THUẬT NGỮ

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- **Một PA tốt hơn** là PA làm cho hàm mục tiêu đạt gần tới mục tiêu hơn. Nghĩa là nó làm cho hàm mục tiêu lớn hơn (đối với bài toán max) hoặc nhỏ hơn (đối với bài toán min).
- PA (1,4) tốt hơn PA (5,0), vì giá trị của hàm mục tiêu
  - tại PA (5,0) là 5,
  - tại PA (1,4) là 13.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- **Một PA tốt hơn** là PA làm cho hàm mục tiêu đạt gần tới mục tiêu hơn. Nghĩa là nó làm cho hàm mục tiêu lớn hơn (đối với bài toán max) hoặc nhỏ hơn (đối với bài toán min).
- PA (1,4) tốt hơn PA (5,0), vì giá trị của hàm mục tiêu
    - tại PA (5,0) là 5,
    - tại PA (1,4) là 13.
- PA (1,4) tốt hơn PA (5,0) thực sự.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- **Một PA tốt hơn** là PA làm cho hàm mục tiêu đạt gần tới mục tiêu hơn. Nghĩa là nó làm cho hàm mục tiêu lớn hơn (đối với bài toán max) hoặc nhỏ hơn (đối với bài toán min).
- PA (1,4) tốt hơn PA (5,0), vì giá trị của hàm mục tiêu
    - tại PA (5,0) là 5,
    - tại PA (1,4) là 13.
- PA (1,4) tốt hơn PA (5,0) thực sự.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \le 5 \\ &2x + y \le 10 \\ &x \ge 1 \\ &y \ge 0 \\ &y \le 4 \end{aligned}$$

- Một PA được gọi là **PA tối ưu** nếu nó làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị max, min tương ứng.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \le 5 \\ &2x + y \le 10 \\ &x \ge 1 \\ &y \ge 0 \\ &y \le 4 \end{aligned}$$

- Một PA được gọi là **PA tối ưu** nếu nó làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị max, min tương ứng.
- Một bài toán QHTT được gọi là giải được nếu nó có PA tối ưu.

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- Một PA được gọi là **PA tối ưu** nếu nó làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị max, min tương ứng.
- Một bài toán QHTT được gọi là giải được nếu nó có PA tối ưu.
- Bài toán QHTT có thể không giải được nếu hoặc
    - Tập phương án là rỗng, hoặc

Xét bài toán QHTT

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- Một PA được gọi là **PA tối ưu** nếu nó làm cho hàm mục tiêu đạt giá trị max, min tương ứng.
- Một bài toán QHTT được gọi là giải được nếu nó có PA tối ưu.
- Bài toán QHTT có thể không giải được nếu hoặc
    - Tập phương án là rỗng, hoặc
    - Hàm mục tiêu không bị chặn trên tập phương án.

PHƯƠNG ÁN CỰC BIÊN - viết tắt PACB

Phương án cực biên

là PA thỏa mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính, trong đó n là số biến của bài toán.

Phương án cực biên

là PA thỏa mãn chặt n ràng buộc độc lập tuyến tính, trong đó n là số biến của bài toán.

Trong bài toán

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &2x + y \leq 10 \\ &x \geq 1 \\ &y \geq 0 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- PA (1,4) là PA cực biên vì nó thỏa 2 ràng buộc

$$\begin{aligned} &x + y \leq 5 \\ &y \leq 4 \end{aligned}$$

- Hệ vectơ tương ứng với hai ràng buộc trên là

$$\begin{aligned} &(1, 1), \\ &(0, 1). \end{aligned}$$

Phương án cực biên suy biến

là PACB thỏa mãn chặt hơn n ràng buộc, trong đó n là số biến của bài toán.

Phương án cực biên suy biến

là PACB thỏa mãn chặt hơn n ràng buộc, trong đó n là số biến của bài toán.

Trong bài toán

$$x + 3y \to \max$$

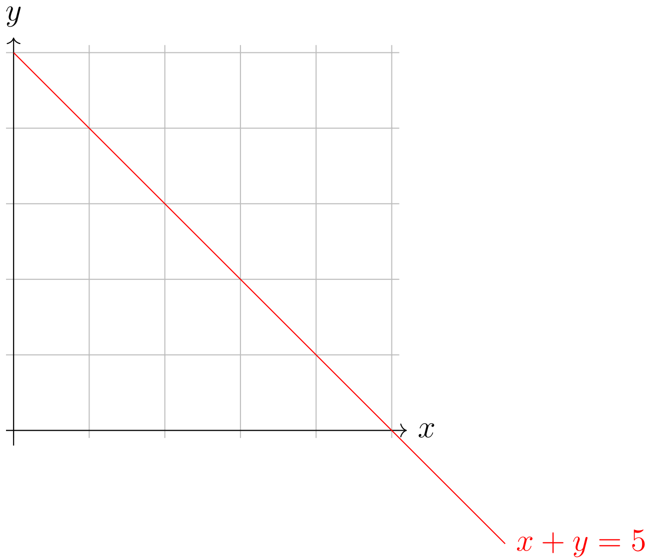
Với các điều kiện

$$\begin{aligned} & x + y \leq 5 \\ & 2x + y \leq 10 \\ & x \geq 1 \\ & y \geq 0 \\ & y \leq 4 \end{aligned}$$

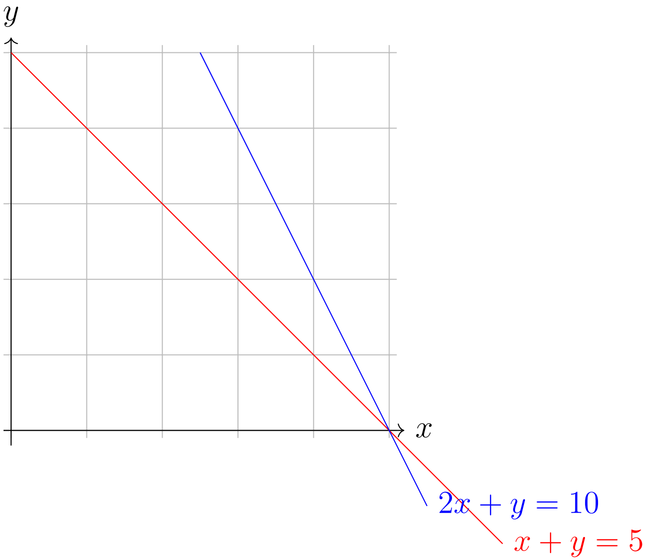
- PA (1,4) là PACB suy biến vì nó thỏa mãn chặt 3 ràng buộc

$$\begin{aligned} & x + y \leq 5 \\ & y \leq 4 \\ & x \geq 1 \end{aligned}$$

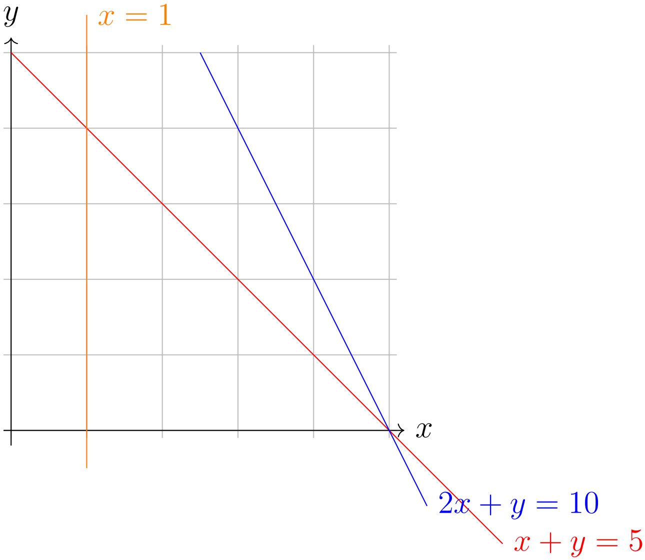
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



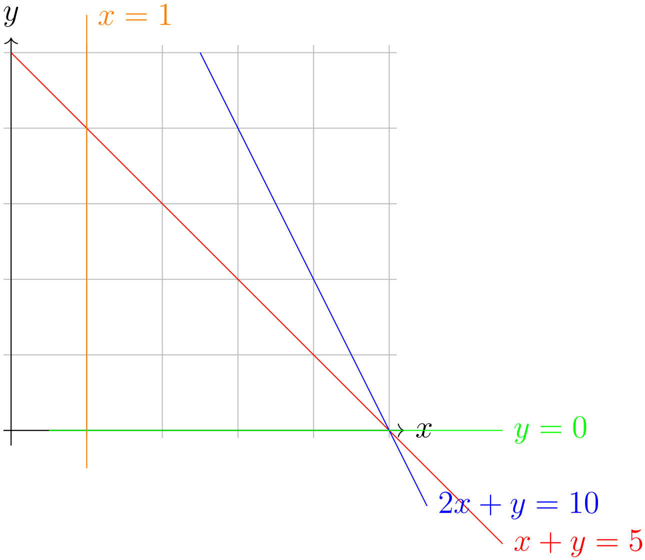
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



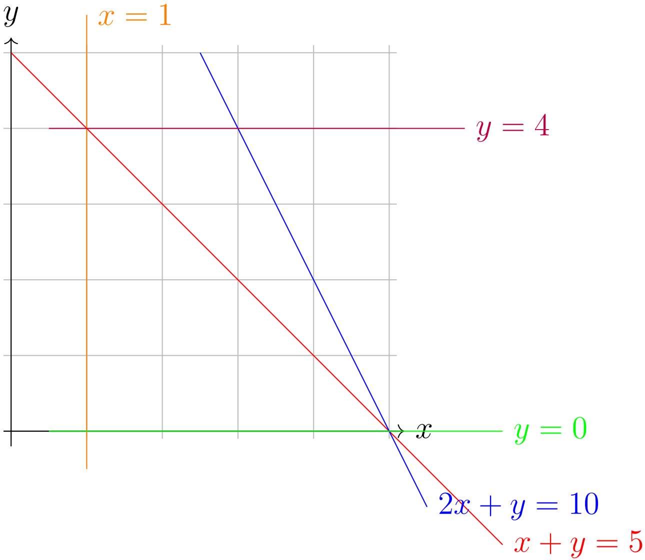
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



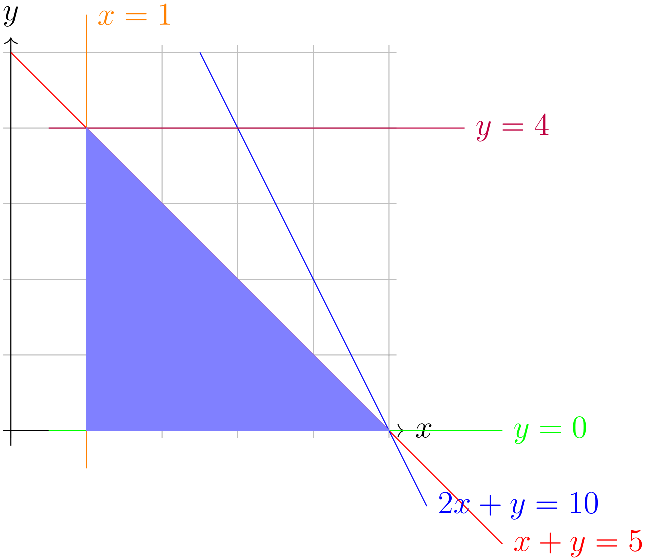
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



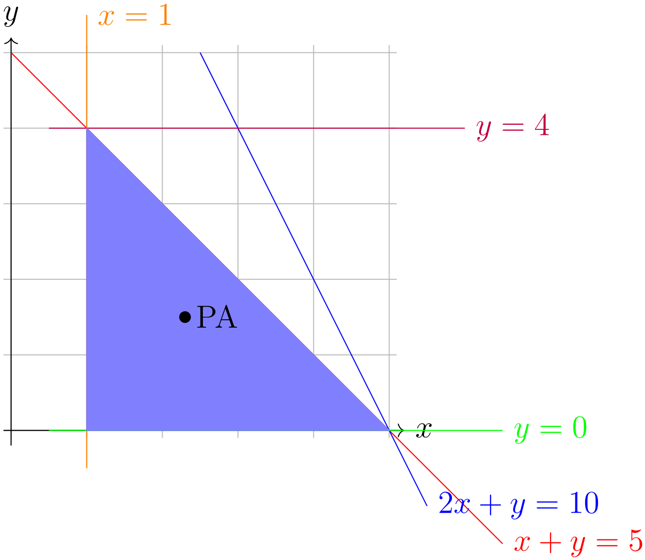
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



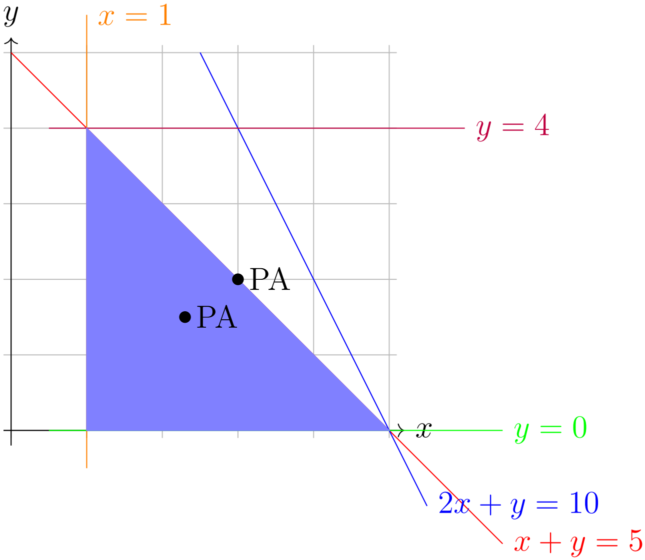
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



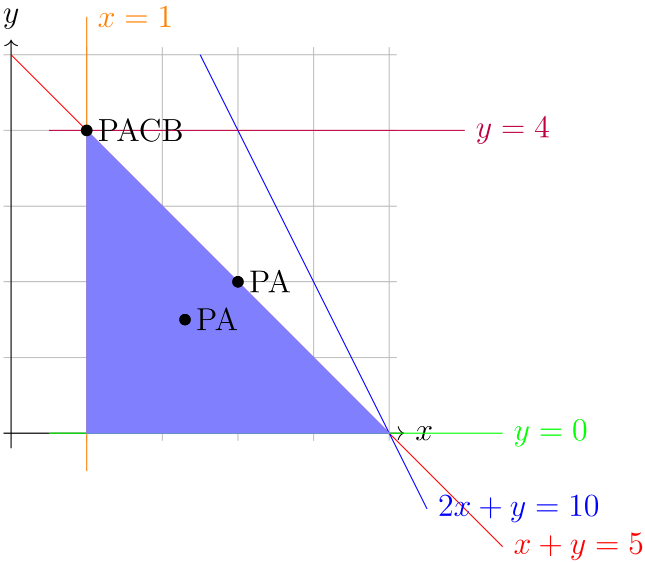
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



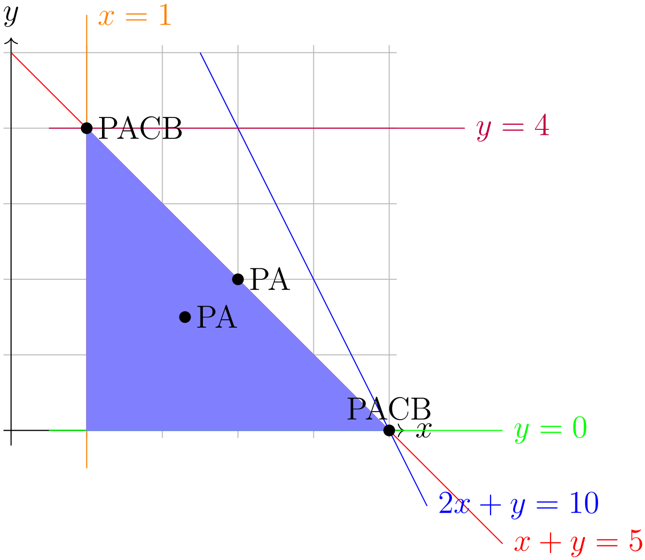
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



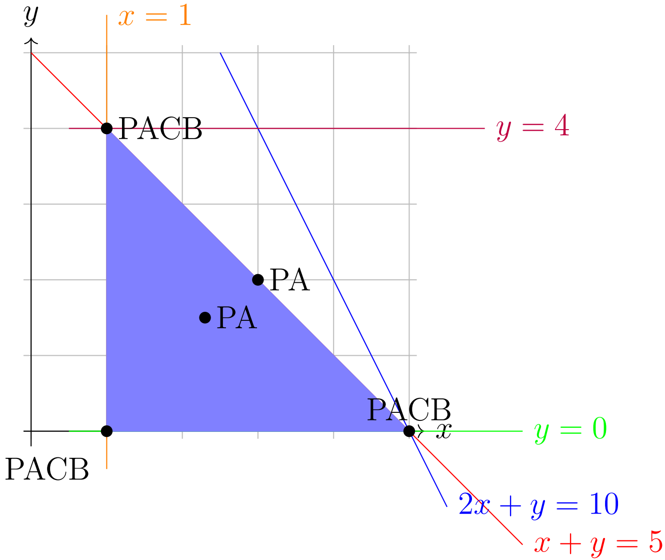
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



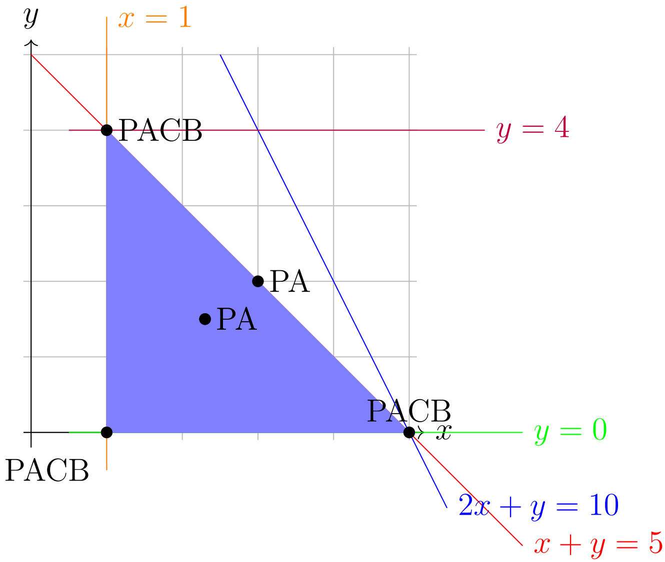
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



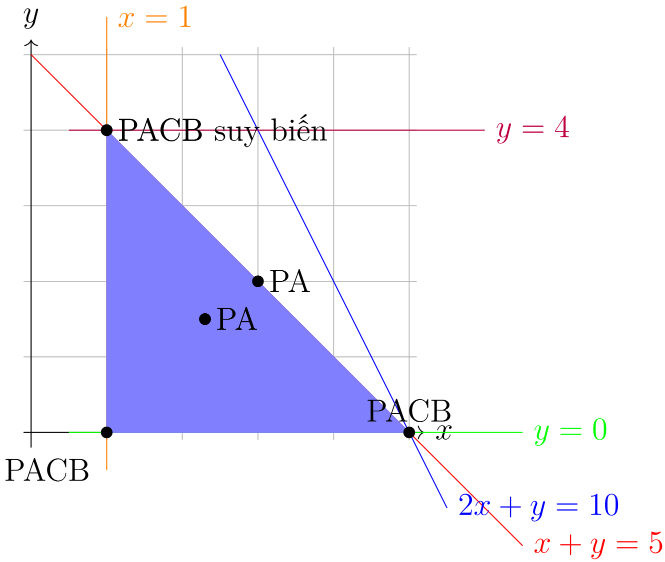
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ

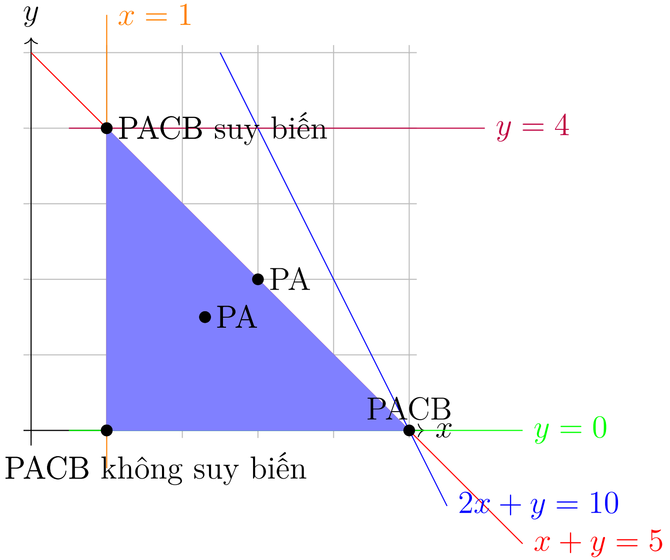


BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



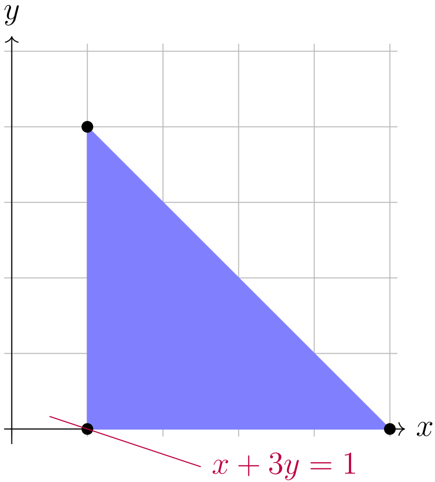
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



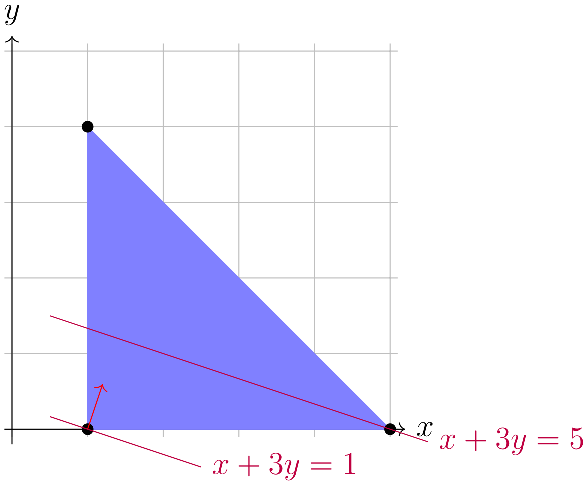


y
$x = 1$
PACB suy biến
$y = 4$
PA
PA
PACB
x
$y = 0$
PACB không suy biến
$2x + y = 10$
$x + y = 5$

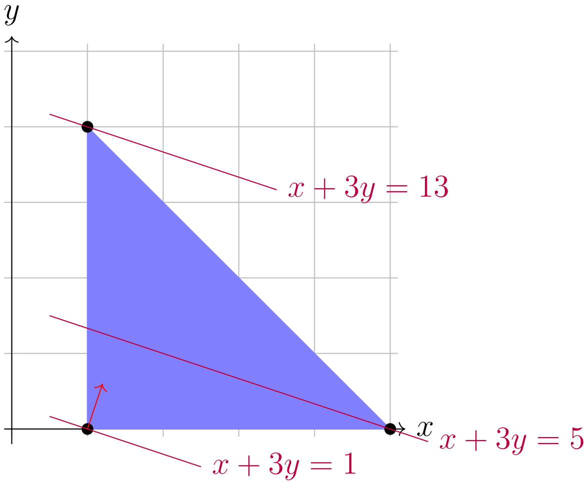
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ

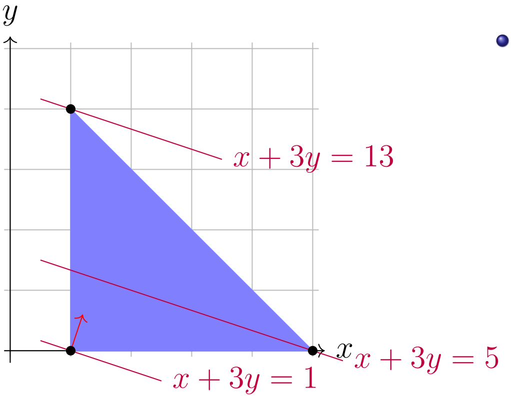


BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ



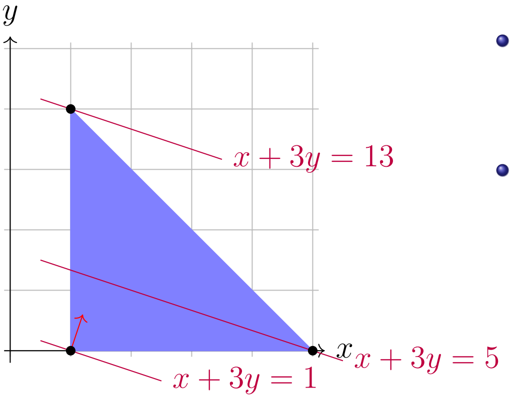
BIỂU DIỄN TRÊN ĐỒ THỊ





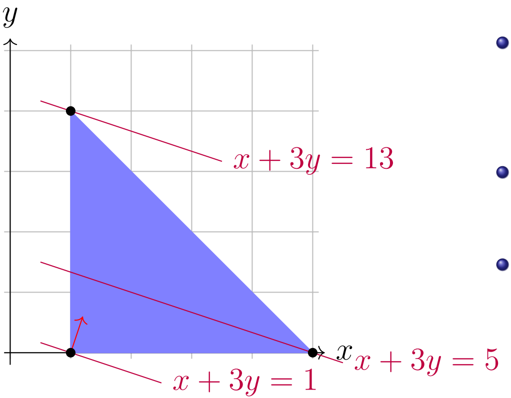
Kết luận:

- Bài toán có 3 PACB, trong đó có 1 PACB không suy biến.



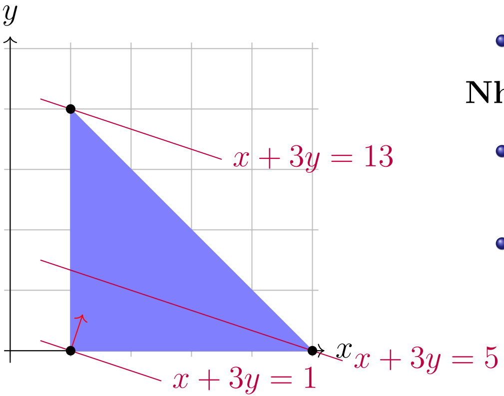
Kết luận:

- Bài toán có 3 PACB, trong đó có 1 PACB không suy biến.
- Bài toán giải được và PATU là (1,4).



Kết luận:

- Bài toán có 3 PACB, trong đó có 1 PACB không suy biến.
- Bài toán giải được và PATU là (1,4).
- Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu là $1 + 3 \cdot 4 = 13$.



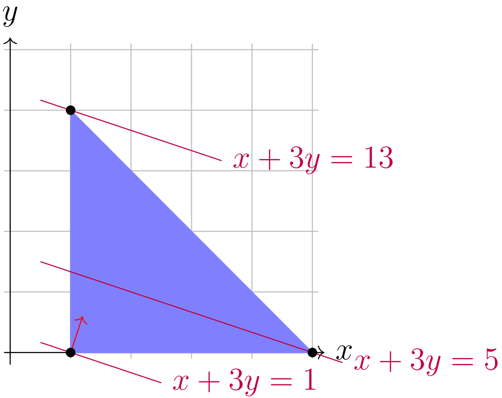
Ưu điểm

- Trực quan, dễ tiếp cận.

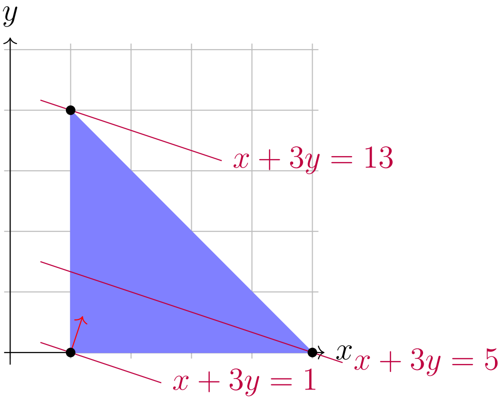
Nhược điểm

- Chỉ áp dụng cho bài toán có 2 hoặc 3 biến.
- Khó thuật toán hóa.

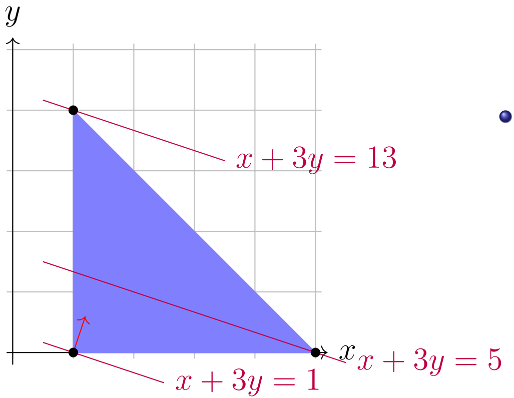
Ý TƯỞNG CỦA PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ



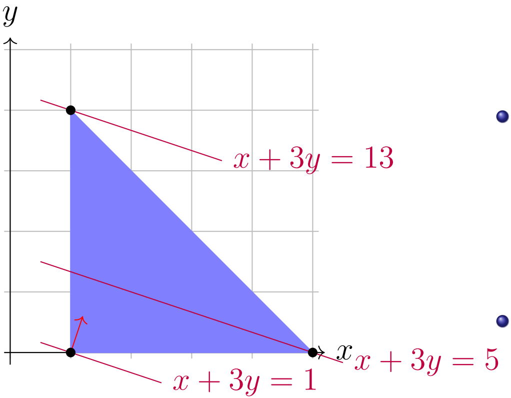
Ý TƯỞNG CỦA PHƯƠNG PHÁP ĐỒ THỊ



- Bắt đầu từ một PACB, tại điểm đó ta vẻ đường thẳng của hàm mục tiêu.



- Bắt đầu từ một PACB, tại điểm đó ta vẽ đường thẳng của hàm mục tiêu.
- Tiếp tục vẽ song song các đường thẳng của hàm mục tiêu. So sánh giá trị của chúng tại các điểm cực biên.



- Bắt đầu từ một PACB, tại điểm đó ta vẻ đường thẳng của hàm mục tiêu.
- Tiếp tục vẽ song song các đường thẳng của hàm mục tiêu. So sánh giá trị của chúng tại các điểm cực biên.
- Tiếp tục cho đến khi so sánh hết PACB và sau đó kết luận về PATƯ.

Bài tập 1

Xét bài toán QHTT

$$z = 2x + 5y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl} -3x & + & 2y & \leq 6 \\ x & + & 2y & \leq 2 \\ x & & & \geq 0 \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

1. Xác định hàm mục tiêu.
2. Xác định hệ tất cả các ràng buộc.
3. Xác định ràng buộc dấu.
4. Xác định vectơ tương ứng của từng ràng buộc.
5. Xác định một hệ gồm hai ràng buộc ĐLTT và một hệ ba ràng buộc ĐLTT.

Bài tập 1

Xét bài toán QHTT

$$z = 2x + 5y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl} -3x & + & 2y & \leq 6 \\ x & + & 2y & \leq 2 \\ x & & & \geq 0 \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

1. Xác định hai ràng buộc không ĐLTT.
2. Xác định một PA.
3. Xác định tập các PA.
4. Vẽ đồ thị biểu diễn tập các PA.
5. Chọn hai PA rồi so sánh xem PA nào tốt hơn.
6. Xác định tất cả các PACB.

Bài tập 2

Xét bài toán QHTT

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl} -x & + & y & \leq 4 \\ 5x & + & 3y & \leq 15 \\ x & & & \geq 0 \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

1. Vẽ đồ thị biểu diễn miền ràng buộc.
2. Xác định tập các PA trên đồ thị, các PACB.
3. Xác định xem các PACB bên trên có suy biến hay không? Chứng minh.
4. Xác định PATU bằng phương pháp hình học.

BÀI TOÁN QHTT CHÍNH TẮC

Bài toán QHTT được gọi là chính tắc nếu nó có dạng dưới đây

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{cases}$$

BÀI TOÁN QHTT CHÍNH TẮC

Ta xét bài toán QHTT dạng chính tắc vì những lý do đặc biệt sau:

1. Bằng các phép biến đổi thích hợp (và rất dễ dàng thực hiện) thì mọi bài toán QHTT đều có thể chuyển về dạng chính tắc.
2. Phương án của bài toán QHTT dạng chính tắc dễ xây dựng và cũng dễ phân tích.
3. Từ PATU và giá trị tối ưu của bài toán chính tắc, ta có thể suy ra PATU cũng như giá trị tối ưu của bài toán gốc.

BÀI TOÁN QHTT TỔNG QUÁT

BÀI TOÁN QHTT CHÍNH TẮC

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

BÀI TOÁN QHTT TỔNG QUÁT

1. Hàm mục tiêu $\to$ max hoặc min.

BÀI TOÁN QHTT CHÍNH TẮC

1. Hàm mục tiêu $\to$ max hoặc min.

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

BÀI TOÁN QHTT TỔNG QUÁT

1. Hàm mục tiêu $\rightarrow$ max hoặc min.
2. Các ràng buộc "=".

BÀI TOÁN QHTT CHÍNH TẮC

1. Hàm mục tiêu $\rightarrow$ max hoặc min.
2. Các ràng buộc "=".

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

BÀI TOÁN QHTT TỔNG QUÁT

1. Hàm mục tiêu $\to$ max hoặc min.
2. Các ràng buộc "$=$".
3. Các ràng buộc "$\geq$".

BÀI TOÁN QHTT CHÍNH TẮC

1. Hàm mục tiêu $\to$ max hoặc min.
2. Các ràng buộc "$=$".
3. Không có ràng buộc "$\geq$".

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

BÀI TOÁN QHTT TỔNG QUÁT

1. Hàm mục tiêu $\to$ max hoặc min.
2. Các ràng buộc "$=$".
3. Các ràng buộc "$\geq$".
4. Các ràng buộc "$\leq$".

BÀI TOÁN QHTT CHÍNH TẮC

1. Hàm mục tiêu $\to$ max hoặc min.
2. Các ràng buộc "$=$".
3. Không có ràng buộc "$\geq$".
4. Không có ràng buộc "$\leq$".

BÀI TOÁN QHTT TỔNG QUÁT

1. Hàm mục tiêu $\to$ max hoặc min.
2. Các ràng buộc "$=$".
3. Các ràng buộc "$\geq$".
4. Các ràng buộc "$\leq$".
5. Có hoặc không có ràng buộc dấu.

BÀI TOÁN QHTT CHÍNH TẮC

1. Hàm mục tiêu $\to$ max hoặc min.
2. Các ràng buộc "$=$".
3. Không có ràng buộc "$\geq$".
4. Không có ràng buộc "$\leq$".
5. Tất cả các biến đều có ràng buộc dấu "≥ 0".

Kết luận

Như vậy để chuyển bài toán tổng quát về bài toán chính tắc, ta chỉ cần

1. Giữ nguyên hàm mục tiêu.

Kết luận

Như vậy để chuyển bài toán tổng quát về bài toán chính tắc, ta chỉ cần

1. Giữ nguyên hàm mục tiêu.
2. Giữ nguyên các ràng buộc "=".

Kết luận

Như vậy để chuyển bài toán tổng quát về bài toán chính tắc, ta chỉ cần

1. Giữ nguyên hàm mục tiêu.
2. Giữ nguyên các ràng buộc "=".
3. Thêm biến thích hợp để chuyển các ràng buộc "$\geq$" và "$\leq$" thành các ràng buộc "=".

Kết luận

Như vậy để chuyển bài toán tổng quát về bài toán chính tắc, ta chỉ cần

1. Giữ nguyên hàm mục tiêu.
2. Giữ nguyên các ràng buộc "=".
3. Thêm biến thích hợp để chuyển các ràng buộc "$\geq$" và "$\leq$" thành các ràng buộc "=".
4. Đổi biến thích hợp để tất cả các biến đều có ràng buộc dấu "≥ 0"

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

1. Chuyển ràng buộc "$\geq$" và "$\leq$" thành ràng buộc "$=$".

1. Chuyển ràng buộc "$\geq$" và "$\leq$" thành ràng buộc "$=$".

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Thêm } z\geq 0 \text{ và } t\geq 0} \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + 3y + t = 2 \end{cases}$$

1. Chuyển ràng buộc "$\geq$" và "$\leq$" thành ràng buộc "=".

$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 2x + 3y \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{Thêm } z \geq 0 \text{ và } t \geq 0} \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + 3y + t = 2 \end{cases}$$

2. Đổi biến thích hợp để tất cả các biến đều có ràng buộc dấu "≥ 0".

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \text{ bất kì} \end{cases} \xrightarrow[x' = -x]{\text{Thêm } z \geq 0 \text{ và } t \geq 0} \begin{cases} x' \geq 0 \\ y = z - t \end{cases}$$

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl} -x & + & y & \geq 4 \\ 5x & + & 3y & \leq 15 \\ x & & & \geq 0 \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl} -x & + & y & \geq 4 \\ 5x & + & 3y & \leq 15 \\ x & & & \geq 0 \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

$$z = 4x + 3y \to \max$$

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl} -x & + & y & \geq 4 \\ 5x & + & 3y & \leq 15 \\ x & & & \geq 0 \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrcrl} -x & + & y & - & u & = 4 \end{array}$$

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl} -x & + & y & \geq 4 \\ 5x & + & 3y & \leq 15 \\ x & & & \geq 0 \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & y & - & u & & & = 4 \\ 5x & + & 3y & & & + & v & = 15 \end{array}$$

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl} -x & + & y & \geq 4 \\ 5x & + & 3y & \leq 15 \\ x & & & \geq 0 \\ & & y & \geq 0 \end{array}$$

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrcrcrl} -x & + & y & - & u & & & = 4 \\ 5x & + & 3y & & & + & v & = 15 \\ x & & & & & & & \geq 0 \\ & & y & & & & & \geq 0 \end{array}$$

CHUYỂN BT TỔNG QUÁT SANG CHÍNH TẮC

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrl}
-x & + & y & \geq 4 \\
5x & + & 3y & \leq 15 \\
x & & & \geq 0 \\
 & & y & \geq 0
\end{array}$$

$$z = 4x + 3y \to \max$$

với các ràng buộc

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
-x & + & y & - & u & & & = 4 \\
5x & + & 3y & & & + & v & = 15 \\
x & & & & & & & \geq 0 \\
 & & y & & & & & \geq 0 \\
 & & & & u & & & \geq 0 \\
 & & & & & & v & \geq 0
\end{array}$$

Chuyển các bài toán QHTT sau về dạng chính tắc:

1.

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq -8 \\ x_1, \ x_2, \ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

2.

$$\begin{array}{l} 2x + 5y \to \max \\ 3x + 2y \leq 6 \\ 2x + 9y \leq 8 \\ x \geq 0 \end{array}$$

1. Cài đặt Add-in Solver: Solver-Excel

1. Cài đặt Add-in Solver: Solver-Excel
2. Đường link tham khảo: http://bis.net.vn/forums/t/500.aspx.

$$x + 3y \to \max$$

Với các điều kiện

$$\begin{aligned}
&x + y \leq 5\\
&2x + y \leq 10\\
&x \geq 1\\
&y \geq 0\\
&y \leq 4
\end{aligned}$$

Bài tập. Giải bài toán QHTT sau đây bằng Excel-Solver:

1.
$$\begin{array}{rcccccl} f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

Bài tập. Cho bài toán QHTT

$$\begin{array}{rcrcrl} f(x) = 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & \to \max \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \geq 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & \leq 12 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & \leq 10 \\ x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

1. Chuyển bài toán trên về dạng chính tắc.
2. Giải cả bài toán gốc và bài toán dạng chính tắc bằng Excel-Solver.

DẠNG MA TRẬN CỦA BÀI TOÁN CHÍNH TẮC

Bài toán QHTT được gọi là chính tắc nếu nó có dạng dưới đây

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. & \end{cases}$$

DẠNG MA TRẬN CỦA BÀI TOÁN CHÍNH TẮC

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. & \end{cases}$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max(\min)$$

Với các ràng buộc

$$\begin{cases} AX = b \\ X \geq 0, \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

BÀI TOÁN

$$\begin{array}{rcrcrl} f(x) = x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

BÀI TOÁN

$$\begin{array}{rcccccl} f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

VIẾT DƯỚI THUẬT NGỮ MA TRẬN

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$

BÀI TOÁN

$$
\begin{array}{rcrcrl}
f(x) = \; x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\
x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\
x_i & \geq & 0 & \forall i. & &
\end{array}
$$

VIẾT DƯỚI THUẬT NGỮ MA TRẬN

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

VECTƠ CỘT CỦA PHƯƠNG ÁN

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

- Vectơ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ được gọi là vectơ cột tương ứng với phần tử x_1.

VECTƠ CỘT CỦA PHƯƠNG ÁN

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

- Vectơ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ được gọi là vectơ cột tương ứng với phần tử x_1.
- Tương tự, Vectơ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ là vectơ cột tương ứng với phần tử x_2.

VECTƠ CỘT CỦA PHƯƠNG ÁN

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

- Vectơ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ được gọi là vectơ cột tương ứng với phần tử x_1.
- Tương tự, Vectơ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ là vectơ cột tương ứng với phần tử x_2.
- Tương tự, Vectơ $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ là vectơ cột tương ứng với phần tử x_3.
- *Lưu ý phân biệt với vectơ dòng của ràng buộc.*

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Bài toán có một phương án là $(1, 1, 0)$.

- Vectơ cột tương ứng với $x_1 = 1$ là $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

VECTƠ CỘT CỦA PHƯƠNG ÁN

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Bài toán có một phương án là $(1, 1, 0)$.

- Vectơ cột tương ứng với $x_1 = 1$ là $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vectơ cột tương ứng với $x_2 = 1$ là $A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq 0.$$

Bài toán có một phương án là $(1, 1, 0)$.

- Vectơ cột tương ứng với $x_1 = 1$ là $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Vectơ cột tương ứng với $x_2 = 1$ là $A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- Vectơ cột tương ứng với các phần tử dương của PA $(1, 1, 0)$ là $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Định lý

Phương án x của bài toán chính tắc là PACB khi và chỉ khi hệ các vectơ cột tương ứng với các thành phần dương của x là độc lập tuyến tính.

PACB CỦA BÀI TOÁN CHÍNH TẮC

Định lý

Phương án x của bài toán chính tắc là PACB khi và chỉ khi hệ các vectơ cột tương ứng với các thành phần dương của x là độc lập tuyến tính.

Example

$$\begin{array}{rrrrrrrl} f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

- PA $x = (1, 1, 0)$ là một PACB.

Định lý

Phương án x của bài toán chính tắc là PACB khi và chỉ khi hệ các vectơ cột tương ứng với các thành phần dương của x là độc lập tuyến tính.

Example

$$\begin{array}{rrrrrrl} f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

- PA $x = (1, 1, 0)$ là một PACB.
- Hệ vectơ cột tương ứng với các thành phần dương là

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

và chúng ĐLTT.

PACB CỦA BÀI TOÁN CHÍNH TẮC

Example

$$\begin{array}{rrcrcrl} f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

- PA $x = (5/8, 7/8, 1/8)$ không phải là một PACB.

PACB CỦA BÀI TOÁN CHÍNH TẮC

Example

$$\begin{array}{rrcrcrl} f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

- PA $x = (5/8, 7/8, 1/8)$ không phải là một PACB.
- Hệ vectơ cột tương ứng với các thành phần dương là

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

và chúng không ĐLTT.

Xét bài toán chính tắc

$$\begin{aligned} f &\to \min(\max) \\ &Ax = b \\ &x \geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$.

Định lý Sylveste. HPT $Ax = b$ có

- nghiệm duy nhất nếu $m = n = \text{rank}(A)$,
- vô nghiệm nếu $\text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$,
- vô số nghiệm nếu $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$.

CƠ SỞ CỦA PACB

Xét bài toán chính tắc

$$\begin{aligned} f &\to \min(\max) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$.

Định lý Sylveste. HPT $Ax = b$ có

- nghiệm duy nhất nếu $m = n = \text{rank}(A)$,
- vô nghiệm nếu $\text{rank}(A) < \text{rank}(A|b)$,
- vô số nghiệm nếu $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) < n$.

Do đó, ta có thể giả sử A gồm m dòng độc lập tuyến tính và $m < n$.

CƠ SỞ CỦA PACB

$$\begin{array}{rcccccl}
f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\
 & x_i & \geq & 0 & \forall i. & &
\end{array}$$

- $x = (1, 1, 0)$ là một PACB.

CƠ SỞ CỦA PACB

$$\begin{array}{rrcrcrl} f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

với các thành phần dương là

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

- $x = (1, 1, 0)$ là một PACB.
- Hệ vectơ cột (ĐLTT) tương ứng

$$\begin{array}{rcccccl} f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

- $x = (1, 1, 0)$ là một PACB.
- Hệ vectơ cột (ĐLTT) tương ứng

với các thành phần dương là

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

- Hệ $\{A_1, A_2\}$ bên trên được gọi là một cơ sở của PACB $(1, 1, 0)$.

$$\begin{array}{rrrrrrrl} f(x)= & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \rightarrow \min \\ & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

- $x = (1, 1, 0)$ là một PACB.
- Hệ vectơ cột (ĐLTT) tương ứng

với các thành phần dương là

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

- Hệ $\{A_1, A_2\}$ bên trên được gọi là một cơ sở của PACB $(1, 1, 0)$.

Định nghĩa

Cho một PACB x. Một hệ m vectơ cột ĐLTT trong đó có *chứa các vectơ cột tương ứng với các thành phần dương của* x, được gọi là một cơ sở của x.

Example

Cho bài toán chính tắc

$$
\begin{array}{rrcrcrl}
f = & 2x_1 & + & 5x_2 & & & \to \max \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 6 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & = 4 \\
 & x_i & \geq & 0 & \forall i. & &
\end{array}
$$

Example

Cho bài toán chính tắc

$$\begin{array}{rrcrcrl} f = & 2x_1 & + & 5x_2 & & & \to \max \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 6 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & = 4 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

1. Xác định một PACB có đúng 1 thành phần dương.
2. Xác định một PACB có đúng 2 thành phần dương.
3. Xác định hệ các vectơ cột tương ứng với các PACB trên.
4. Xác định các cơ sở của các PACB trên.

Example

Cho bài toán

$$
\begin{array}{rccccccl}
f(x) = & x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\
 & x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\
 & x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\
 & x_i & \geq & 0 & \forall i. & &
\end{array}
$$

Example

Cho bài toán

$$\begin{array}{rcrcrl} f(x) = \quad x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \to \min \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ x_i & \geq & 0 & \forall i. & & \end{array}$$

1. Xác định một PA có đúng 1 thành phần dương.
2. Xác định một PA có đúng 2 thành phần dương.
3. Xác định một PA có đúng 3 thành phần dương.
4. Trong các PA trên, PA nào là PACB?
5. Xác định các cơ sở của các PACB tìm được.

1. Nếu PACB x nào cũng có tối đa là m thành phần dương.

PACB SUY BIẾN VÀ KHÔNG SUY BIẾN

1. Nếu PACB x nào cũng có tối đa là m thành phần dương.
2. Nếu PACB x có m thành phần dương thì nó là PACB không suy biến.

PACB SUY BIẾN VÀ KHÔNG SUY BIẾN

1. Nếu PACB x nào cũng có tối đa là m thành phần dương.
2. Nếu PACB x có m thành phần dương thì nó là PACB không suy biến.
3. Ngược lại thì nó là PACB suy biến.

PACB SUY BIẾN VÀ KHÔNG SUY BIẾN

1. Nếu PACB x nào cũng có tối đa là m thành phần dương.
2. Nếu PACB x có m thành phần dương thì nó là PACB không suy biến.
3. Ngược lại thì nó là PACB suy biến.
4. Đối với PACB không suy biến, ta chỉ có một cơ sở duy nhất. Còn đối với PACB suy biến ta có thể có nhiều cơ sở.

Định nghĩa

Giả sử ta có một PACB x, và một cơ sở gồm m vectơ cột.

- Các biến x_i tương ứng với các vectơ cột trong cơ sở trên được gọi là các biến cơ sở (tương ứng với PACB x),

Định nghĩa

Giả sử ta có một PACB x, và một cơ sở gồm m vectơ cột.

- Các biến x_i tương ứng với các vectơ cột trong cơ sở trên được gọi là các biến cơ sở (tương ứng với PACB x),
- các biến còn lại được gọi là các biến phi cơ sở.

BIẾN CƠ SỞ CỦA PACB

Định nghĩa

Giả sử ta có một PACB x, và một cơ sở gồm m vectơ cột.

- Các biến x_i tương ứng với các vectơ cột trong cơ sở trên được gọi là các biến cơ sở (tương ứng với PACB x),
- các biến còn lại được gọi là các biến phi cơ sở.
- Các thành phần của x tương ứng với các biến cơ sở được gọi là các thành phần cơ sở, các thành phần còn lại được gọi là thành phần phi cơ sở.

BIẾN CƠ SỞ - VÍ DỤ

$$
\begin{array}{rcrcrl}
f = & 2x_1 & + & 5x_2 & & & \to \max \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 6 \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & = 4 \\
& x_i & \geq & 0 & \forall i. & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
f = & 2x_1 & + & 5x_2 & & & & \to \max \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & = 6 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & & = 4 \\
 & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & &
\end{array}
$$

1. $x = (2, 0, 0, 0)$ có phải là một PA không?

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
f = & 2x_1 & + & 5x_2 & & & & \to \max \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & = 6 \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & & = 4 \\
& x_i & \geq & 0 & \forall i. & & &
\end{array}
$$

1. $x = (2, 0, 0, 0)$ có phải là một PA không?
2. PA x có phải là một PACB không? Nếu nó là PACB thì xác định một cơ sở, và cho biết cơ sở đó có duy nhất không.

BIẾN CƠ SỞ - VÍ DỤ

$$
\begin{array}{rcccccl}
f = & 2x_1 & + & 5x_2 & & & \to \max \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 6 \\
& 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & = 4 \\
& x_i & \geq & 0 & \forall i. & &
\end{array}
$$

1. $x = (2, 0, 0, 0)$ có phải là một PA không?
2. PA x có phải là một PACB không? Nếu nó là PACB thì xác định một cơ sở, và cho biết cơ sở đó có duy nhất không.
3. Nếu PA x là một PACB thì xác định các thành phần cơ sở, các biến cơ sở, các thành phần phi cơ sở và các biến phi cơ sở.

BIẾN CƠ SỞ - VÍ DỤ

$$\begin{array}{rcrcrcrl} f = & 2x_1 & + & 5x_2 & & & & \to \max \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & = 6 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & & = 4 \\ & x_i & \geq & 0 & \forall i. & & & \end{array}$$

1. $x = (2, 0, 0, 0)$ có phải là một PA không?
2. PA x có phải là một PACB không? Nếu nó là PACB thì xác định một cơ sở, và cho biết cơ sở đó có duy nhất không.
3. Nếu PA x là một PACB thì xác định các thành phần cơ sở, các biến cơ sở, các thành phần phi cơ sở và các biến phi cơ sở.
4. PA trên nếu là PACB thì có phải là PACB suy biến không? Và vì sao?

CÁC ĐỊNH LÝ XÁC ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

Các Định lý xác định nghiệm

1. Nếu bài toán có PA và hạng của ma trận hệ số bằng với số biến thì bài toán có PACB.

CÁC ĐỊNH LÝ XÁC ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

Các Định lý xác định nghiệm

1. Nếu bài toán có PA và hạng của ma trận hệ số bằng với số biến thì bài toán có PACB.
2. Nếu bài toán có PA và trị số hàm mục tiêu bị chặn trên (đối với bài toán max) hoặc bị chặn dưới (đối với bài toán min) trên tập PA thì bài toán có PATƯ. Hơn nữa, nếu bài toán còn có PACB thì ta còn kết luận mạnh hơn là bài toán có PACB tối ưu.

CÁC ĐỊNH LÝ XÁC ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN TỔNG QUÁT

Các Định lý xác định nghiệm

1. Nếu bài toán có PA và hạng của ma trận hệ số bằng với số biến thì bài toán có PACB.
2. Nếu bài toán có PA và trị số hàm mục tiêu bị chặn trên (đối với bài toán max) hoặc bị chặn dưới (đối với bài toán min) trên tập PA thì bài toán có PATƯ. Hơn nữa, nếu bài toán còn có PACB thì ta còn kết luận mạnh hơn là bài toán có PACB tối ưu.
3. Số PACB là hữu hạn.

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = \ & 2x_1 + 5x_2 \to \max \\ & 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$f = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i.$$

1. Chứng minh rằng bài toán có PA.
2. Chứng minh rằng bài toán có PACB.

VÍ DỤ

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = \quad & 2x_1 + 5x_2 \to \max \\ & 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

1. Chứng minh rằng bài toán có PA.
2. Chứng minh rằng bài toán có PACB.

Định lý

Nếu một bài toán chính tắc có PA thì sẽ có PACB.

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$
\begin{aligned}
f = \ & 2x_1 + 5x_2 \to \max \\
& 3x_1 + 2x_2 = 6 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i.
\end{aligned}
$$

VÍ DỤ

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$f = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$
$$3x_1 + 2x_2 = 6$$
$$x_i \geq 0 \quad \forall i.$$

1. Chứng minh rằng bài toán có PATƯ.
2. Tìm nghiệm của bài toán QHTT trên.

VÍ DỤ

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$
\begin{aligned}
f = \ & 2x_1 + 5x_2 \to \max \\
& 3x_1 + 2x_2 = 6 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i.
\end{aligned}
$$

1. Chứng minh rằng bài toán có PATU.
2. Tìm nghiệm của bài toán QHTT trên.

Nhận xét

Để giải bài toán chính tắc, ta "chỉ việc" tìm tất cả các PACB rồi chọn PACB làm cho hàm mục tiêu đạt tới giá trị tối ưu (tức là lớn nhất đối với bài toán max và nhỏ nhất đối với bài toán min).

VÍ DỤ

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = \quad & 2x_1 + 5x_2 \to \max \\ & 3x_1 + 2x_2 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

1. Chứng minh rằng bài toán có PATƯ.
2. Tìm nghiệm của bài toán QHTT trên.

Nhận xét

Để giải bài toán chính tắc, ta "chỉ việc" tìm tất cả các PACB rồi chọn PACB làm cho hàm mục tiêu đạt tới giá trị tối ưu (tức là lớn nhất đối với bài toán max và nhỏ nhất đối với bài toán min).

Như vậy, để giải bài toán QHTT bất kì, ta "chỉ việc" chuyển nó sang bài toán chính tắc, sau đó tìm tất cả các PACB và so sánh giá trị của hàm mục tiêu tại các PACB ấy là xong!

BÀI TẬP NHÓM VỀ NHÀ

1. Bài 1, 2, 5,
2. Bài 1, 3. 4
3. Bài 6, 7, 8.
4. Bài 4, 6, 9.
5. Bài 3, 5, 6.
6. Bài 1, 4, 7.
7. Bài 1, 3, 5.
8. Bài 2, 6, 9.

Yêu cầu trình bày

Trình bày bằng word với công thức toán được gõ bằng Mathtype (hoặc trình bày bằng LaTeX). Nhóm trưởng ghi rõ đóng góp của các thành viên nhóm và tải bài làm lên Folder:
GOOGLE-DRIVE-FOLDER

Vì mọi bài toán QHTT đều đưa được về dạng chính tắc, nên không mất tính tổng quát ta sẽ giả sử bài toán ta đang xét là bài toán chính tắc. Xuất phát từ một PACB, ta sẽ

1. Đánh giá xem PACB đó đã tối ưu hay chưa.

Vì mọi bài toán QHTT đều đưa được về dạng chính tắc, nên không mất tính tổng quát ta sẽ giả sử bài toán ta đang xét là bài toán chính tắc. Xuất phát từ một PACB, ta sẽ

1. Đánh giá xem PACB đó đã tối ưu hay chưa.
2. Nếu chưa tối ưu thì ta tìm cách di chuyển sang một PACB mới tốt hơn.

Vì mọi bài toán QHTT đều đưa được về dạng chính tắc, nên không mất tính tổng quát ta sẽ giả sử bài toán ta đang xét là bài toán chính tắc. Xuất phát từ một PACB, ta sẽ

1. Đánh giá xem PACB đó đã tối ưu hay chưa.
2. Nếu chưa tối ưu thì ta tìm cách di chuyển sang một PACB mới tốt hơn.
3. Do số PACB là hữu hạn, nên quá trình này sẽ dừng lại sau một số hữu hạn bước và ta sẽ đạt được hoặc là PATƯ hoặc là bài toán không giải được.

Giả sử ta có một bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f \quad &\to \min(\max) \\ AX \quad &= b \\ X \quad &\geq 0 \end{aligned}$$

và một PACB của nó là x^o. Chúng ta cần đánh giá xem PACB này đã tối ưu hay chưa.

Giả sử ta có một bài toán QHTT

$$\begin{array}{ll} f & \to \min(\max) \\ AX & = b \\ X & \geq 0 \end{array}$$

và một PACB của nó là x^o. Chúng ta cần đánh giá xem PACB này đã tối ưu hay chưa.

- Đối với bài toán max, PACB x là tối ưu nếu với mọi PA x, ta đều có $f(x^o) \geq f(x)$.

ĐÁNH GIÁ PACB

Giả sử ta có một bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f &\to \min(\max) \\ AX &= b \\ X &\geq 0 \end{aligned}$$

và một PACB của nó là x^o. Chúng ta cần đánh giá xem PACB này đã tối ưu hay chưa.

- Đối với bài toán max, PACB x là tối ưu nếu với mọi PA x, ta đều có $f(x^o) \geq f(x)$.
- Đối với bài toán min, PACB x là tối ưu nếu với mọi PA x, ta đều có $f(x^o) \leq f(x)$.

Cho bài toán $f \to \min(\max)$ với điều kiện $AX = b, X \geq 0$. Giả sử bài toán có PACB x^o. Ta sẽ đánh giá PACB x^o theo từng bước như sau:

1. Lấy một PA bất kì, xét mối liên quan giữa x^o và x dựa vào điều kiện $AX = b$.

Cho bài toán $f \to \min(\max)$ với điều kiện $AX = b, X \geq 0$. Giả sử bài toán có PACB x^o. Ta sẽ đánh giá PACB x^o theo từng bước như sau:

1. Lấy một PA bất kì, xét mối liên quan giữa x^o và x dựa vào điều kiện $AX = b$.
2. Dựa vào bước 1, thiết lập mối quan hệ giữa $f(x)$ và $f(x^o)$.

Cho bài toán $f \to \min(\max)$ với điều kiện $AX = b, X \geq 0$. Giả sử bài toán có PACB x^o. Ta sẽ đánh giá PACB x^o theo từng bước như sau:

1. Lấy một PA bất kì, xét mối liên quan giữa x^o và x dựa vào điều kiện $AX = b$.
2. Dựa vào bước 1, thiết lập mối quan hệ giữa $f(x)$ và $f(x^o)$.
3. Dựa vào đó bước 2, thiết lập các điều kiện để đánh giá PACB x^o có là PATƯ hay không.

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA

Cho bài toán $f \to \min(\max)$ với điều kiện $AX = b, X \geq 0$. Giả sử bài toán có PACB x^o. Lấy một PA x bất kì. Lúc đó ta có

$$\begin{cases} Ax^o & = b \\ Ax & = b. \end{cases}$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA

Cho bài toán $f \to \min(\max)$ với điều kiện $AX = b, X \geq 0$. Giả sử bài toán có PACB x^o. Lấy một PA x bất kì. Lúc đó ta có

$$\begin{cases} Ax^o &= b \\ Ax &= b. \end{cases}$$

Ta sẽ dựa vào hệ thức trên và dựa vào tính cực biên của PA x^o để đánh giá xem x^o có tối ưu hay không.

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$
\begin{aligned}
f = \quad & x_1 + 2x_3 \to \max \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\
& x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i.
\end{aligned}
$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = \quad & x_1 + 2x_3 \to \max \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Example

Ngôn ngữ ma trận.

$$f = \quad x_1 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, x_i \geq 0.$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = \quad & x_1 + 2x_3 \to \max \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Example

Ngôn ngữ ma trận.

$$f = \quad x_1 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, x_i \geq 0.$$

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = \; & x_1 + 2x_3 \to \max \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Example

Ngôn ngữ ma trận.

$$f = \; x_1 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, x_i \geq 0.$$

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = \quad & x_1 + 2x_3 \to \max \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Example

Ngôn ngữ ma trận.

$$f = \quad x_1 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, x_i \geq 0.$$

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Example

Xét bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = &\ x_1 + 2x_3 \to \max \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. \end{aligned}$$

Example

Ngôn ngữ ma trận.

$$f = \ x_1 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}, x_i \geq 0.$$

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6,0,0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6,0,0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PA $(1,1,1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 1$$

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 1$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot 1$$

Lưu ý rằng

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 1 \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

PACB $(6,0,0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA - VÍ DỤ

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 1 \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

PACB $(6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

PA $(1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot 1 \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nghĩa là

Nếu PACB $x^o = (x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ có biến cơ sở là x_1, x_2, tương ứng với ma trận cơ sở là $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix}$ VÀ biến phi cơ sở x_3 tương ứng với vectơ phi cơ sở A_3 có biểu diễn $A_3 = aA_1 + bA_2$, thì với mọi phương án $x = (x_1, x_2, x_3)$ ta có

$$\begin{bmatrix} x_1^o - x_1 \\ x_2^o - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot x_3$$

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f &\to \min(\max) \\ &AX = b \\ &X \geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và các dòng của A ĐLTT.

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f \quad & \to \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và các dòng của A ĐLTT. Giả sử

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f &\to \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và các dòng của A ĐLTT. Giả sử

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.
- Hệ vectơ cột cơ sở tương ứng $\{A_i : i \in J\}$.

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f \quad & \to \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và các dòng của A ĐLTT. Giả sử

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.
- Hệ vectơ cột cơ sở tương ứng $\{A_i : i \in J\}$.
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là một PA bất kì.

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f \quad & \to \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và các dòng của A ĐLTT. Giả sử

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.
- Hệ vectơ cột cơ sở tương ứng $\{A_i : i \in J\}$.
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là một PA bất kì.
- $A_j = \sum_{i \in J} a_{ji} A_i$ với $j \notin J$.

MỐI LIÊN QUAN GIỮA PACB VÀ PA

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f \quad & \to \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$ và các dòng của A ĐLTT. Giả sử

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.
- Hệ vectơ cột cơ sở tương ứng $\{A_i : i \in J\}$.
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là một PA bất kì.
- $A_j = \sum\limits_{i \in J} a_{ji} A_i$ với $j \notin J$.

Khi đó,

$$\boxed{x_i^o - x_i = \sum_{j \notin J} a_{ji} x_j \quad \forall i \in J.}$$

ĐÁNH GIÁ PACB - VÍ DỤ

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $\quad f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ĐÁNH GIÁ PACB - VÍ DỤ

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $\quad f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} f(x^o) - f(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \times 1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) - 2 \times 1 \end{aligned}$$

ĐÁNH GIÁ PACB - VÍ DỤ

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $\quad f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ĐÁNH GIÁ PACB - VÍ DỤ

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $\quad f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
f(x^o) - f(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) - 2 \times 1 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \times 1 - 2 \times 1 \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \right) \times 1
\end{aligned}$$

ĐÁNH GIÁ PACB - VÍ DỤ

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $\quad f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Biến cơ sở: x_1, x_2

Cơ sở: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} f(x^o) - f(x) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) - 2 \times 1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \times 1 - 2 \times 1 \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \right) \times 1 \end{aligned}$$

Lưu ý rằng

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ĐÁNH GIÁ PACB - VÍ DỤ

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $\quad f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ĐÁNH GIÁ PACB - VÍ DỤ

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $\quad f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lưu ý rằng

$$f(x^o) - f(x) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \right) \times 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lưu ý rằng

$$f(x^o) - f(x) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \right) \times 1 \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nhận xét

Kí hiệu $\Delta_3 = c_1 \times a + c_2 \times b - c_3$. Nếu vectơ phi cơ sở A_3 có biểu diễn $A_3 = aA_1 + bA_2$, thì $\forall$ PA $x = (x_1, x_2, x_3)$, ta có:

$$f(x^o) - f(x) = (c_1 \times a + c_2 \times b - c_3)x_3$$

ĐÁNH GIÁ PACB - VÍ DỤ

Hàm mục tiêu: $f = x_1 + 2x_3 \to \max$ $\quad f = cX \to \max$, với $c = (1, 0, 2)$.

PACB $x^o = (6, 0, 0)$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

PA $x = (1, 1, 1)$

Hàm mục tiêu: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lưu ý rằng

$$f(x^o) - f(x) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \right) \times 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nhận xét

Kí hiệu $\Delta_3 = c_1 \times a + c_2 \times b - c_3$. Nếu vectơ phi cơ sở A_3 có biểu diễn $A_3 = aA_1 + bA_2$, thì $\forall$ PA $x = (x_1, x_2, x_3)$, ta có:

$$f(x^o) - f(x) = (c_1 \times a + c_2 \times b - c_3)x_3 = \Delta_3 x_3$$

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = cX \quad & \rightarrow \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.

ĐÁNH GIÁ PACB - ĐỊNH LÝ

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = cX \quad & \to \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là một PA bất kì.

ĐÁNH GIÁ PACB - ĐỊNH LÝ

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = cX \quad & \to \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là một PA bất kì.
- $A_j = \sum\limits_{i \in J} a_{ji} A_i$ với $j \notin J$.

Định lý

Cho bài toán chính tắc.

$$\begin{aligned} f = cX \quad & \rightarrow \min(\max) \\ & AX = b \\ & X \geq 0. \end{aligned}$$

- $x^o = (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ là một PACB với các biến cơ sở $\{x_i : i \in J\}$.
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ là một PA bất kì.
- $A_j = \sum\limits_{i \in J} a_{ji} A_i$ với $j \notin J$.

Khi đó,

$$\boxed{f(x^o) - f(x) = \sum_{j \notin J} \Delta_j x_j}$$

trong đó $\Delta_j = \sum\limits_{i \in J} a_{ji} c_i - c_j$.

Do Δ_j không phụ thuộc vào việc chọn PA x và do mọi PA x đều phải thỏa $x \geq 0$ (tức là các $x_i \geq 0$ với mọi i), Do Δ_j không phụ thuộc vào việc chọn PA x và do mọi PA x đều phải thỏa $x \geq 0$ (tức là các $x_i \geq 0$ với mọi i), nên ta có định lý sau:

Định lý đánh giá PACB

Nếu đối với PACB x^o với cơ sở J của bài toán dạng chính tắc mà

- $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j \notin J$ (đối với bài toán min),
- $\Delta_j \geq 0$ với mọi $j \notin J$ (đối với bài toán max),

thì x^o là một PA tối ưu.

Do Δ_j không phụ thuộc vào việc chọn PA x và do mọi PA x đều phải thỏa $x \geq 0$ (tức là các $x_i \geq 0$ với mọi i), nên ta có định lý sau:

Định lý đánh giá PACB

Nếu đối với PACB x^o với cơ sở J của bài toán dạng chính tắc mà

- $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j \notin J$ (đối với bài toán min),
- $\Delta_j \geq 0$ với mọi $j \notin J$ (đối với bài toán max),

thì x^o là một PA tối ưu.

Hơn nữa, nếu các bất đẳng thức $\Delta_j \leq 0$ và $\Delta_j \geq 0$ bên trên được thay lần lượt bằng $\Delta_j < 0$ và $\Delta_j > 0$ thì PACB x^o là PA tối ưu duy nhất.

VÍ DỤ

Example

Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 & \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 & = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 & = 0 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i. & \end{aligned}$$

a. Tìm một PACB, xác định một cơ sở của nó.
b. Tính các hệ số Δ tương ứng.
c. Xét xem PACB đó đã tối ưu hay chưa.

Định lý

Khi tồn tại j sao cho $\Delta_j > 0$ (với bài toán min) hoặc $\Delta_j < 0$ (với bài toán max) thì PACB không phải là phương án tối ưu.

Định lý

Khi tồn tại j sao cho $\Delta_j > 0$ (với bài toán min) hoặc $\Delta_j < 0$ (với bài toán max) thì PACB không phải là phương án tối ưu.

- Hoặc là chứng minh bài toán không có PA tối ưu.

TRƯỜNG HỢP PACB CHƯA TỐI ƯU

Định lý

Khi tồn tại j sao cho $\Delta_j > 0$ (với bài toán min) hoặc $\Delta_j < 0$ (với bài toán max) thì PACB không phải là phương án tối ưu.

- Hoặc là chứng minh bài toán không có PA tối ưu.
- Hoặc là di chuyển sang một PACB khác tốt hơn.

DẤU HIỆU BÀI TOÁN KHÔNG GIẢI ĐƯỢC

Định lý

Cho bài toán chính tắc với PACB x^o và cơ sở tương ứng J_o. Nếu

- tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ji} \leq 0$ với mọi $i \in J$ (đối với bài toán min),
- tồn tại $\Delta_j < 0$ mà $a_{ji} \geq 0$ với mọi $i \in J$ (đối với bài toán max),

thì bài toán không giải được.

DẤU HIỆU BÀI TOÁN KHÔNG GIẢI ĐƯỢC

Định lý

Cho bài toán chính tắc với PACB x^o và cơ sở tương ứng J_o. Nếu

- tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ji} \leq 0$ với mọi $i \in J$ (đối với bài toán min),
- tồn tại $\Delta_j < 0$ mà $a_{ji} \geq 0$ với mọi $i \in J$ (đối với bài toán max),

thì bài toán không giải được.

Example

Cho bài toán QHTT

$$
\begin{aligned}
f = \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max \\
& x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\
& x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i.
\end{aligned}
$$

1. Tìm một PACB.
2. Xét xem PACB đó có tối ưu không.
3. Xét xem bài toán có giải được hay không.

DẤU HIỆU ĐIỀU CHỈNH PACB

Định lý

Cho bài toán chính tắc với PACB x^o và cơ sở tương ứng J_o. Nếu

- với mỗi $\Delta_j > 0$, đều tồn tại $a_{ji} > 0$ (đối với bài toán min),
- với mỗi $\Delta_j < 0$, đều tồn tại $a_{ji} < 0$ (đối với bài toán max),

thì ta có thể điều chỉnh PACB x^o sang PACB mới tốt hơn.

Thuật toán giúp ta điều chỉnh PACB được gọi là **thuật toán đơn hình**.

Ý tưởng

Ý tưởng của phương pháp đơn hình là ta sẽ thay PACB chưa tối ưu bằng một PACB tốt hơn như sau:

1. Xác định cơ sở của PACB ban đầu.

Ý tưởng

Ý tưởng của phương pháp đơn hình là ta sẽ thay PACB chưa tối ưu bằng một PACB tốt hơn như sau:

1. Xác định cơ sở của PACB ban đầu.
2. Thay một vectơ trong cơ sở trên bằng một vectơ mới sao cho hệ vectơ mới

Ý tưởng

Ý tưởng của phương pháp đơn hình là ta sẽ thay PACB chưa tối ưu bằng một PACB tốt hơn như sau:

1. Xác định cơ sở của PACB ban đầu.
2. Thay một vectơ trong cơ sở trên bằng một vectơ mới sao cho hệ vectơ mới
   - trở thành một cơ sở (tức là ĐLTT).
   - có PACB mới tương ứng tốt hơn PACB ban đầu.

Để đơn giản, ta sẽ giả sử bài toán của chúng ta là bài toán MIN và

- PACB ban đầu là x^o có cơ sở là $J_o = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

NỘI DUNG THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

Để đơn giản, ta sẽ giả sử bài toán của chúng ta là bài toán MIN và

- PACB ban đầu là x^o có cơ sở là $J_o = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.
- x_o chưa phải là PA tối ưu, và các dấu hiệu cho thấy ta có thể tìm PACB tốt hơn.

Để đơn giản, ta sẽ giả sử bài toán của chúng ta là bài toán MIN và

- PACB ban đầu là x^o có cơ sở là $J_o = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.
- x_o chưa phải là PA tối ưu, và các dấu hiệu cho thấy ta có thể tìm PACB tốt hơn.

Ý tưởng của PP đơn hình

Ý tưởng của PP đơn hình là loại một vectơ A_i ra khỏi cơ sở J_o và thay vào bằng một vectơ khác để được một cơ sở mới J_1, mà sao cho PACB tương ứng là tốt hơn.

Định lý

Cho bài toán chính tắc MIN với PACB x^o và cơ sở tương ứng J_o.

Định lý

Cho bài toán chính tắc MIN với PACB x^o và cơ sở tương ứng J_o.

- Nếu $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j \notin J$ thì x^o là PA tối ưu.

NHẮC LẠI VỀ CÁC DẤU HIỆU VỚI BÀI TOÁN MIN

Định lý

Cho bài toán chính tắc MIN với PACB x^o và cơ sở tương ứng J_o.

- Nếu $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j \notin J$ thì x^o là PA tối ưu.
- Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ji} \leq 0$ với mọi $i \in J$ thì bài toán không giải được.

Định lý

Cho bài toán chính tắc MIN với PACB x^o và cơ sở tương ứng J_o.

- Nếu $\Delta_j \leq 0$ với mọi $j \notin J$ thì x^o là PA tối ưu.
- Nếu tồn tại $\Delta_j > 0$ mà $a_{ji} \leq 0$ với mọi $i \in J$ thì bài toán không giải được.
- Nếu với mỗi $\Delta_j > 0$, đều tồn tại $i \in J_o$ nào đó sao cho $a_{ji} > 0$ thì có thể điều chỉnh PACB x^o đến một PACB khác tốt hơn.

1. Chọn s sao cho $\Delta_s = \max\{\Delta_j : j \notin J_o\}$.

NỘI DUNG THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

1. Chọn s sao cho $\Delta_s = \max\{\Delta_j : j \notin J_o\}$.
2. Đưa vectơ A_s vào cơ sở.

NỘI DUNG THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

1. Chọn s sao cho $\Delta_s = \max\{\Delta_j : j \notin J_o\}$.
2. Đưa vectơ A_s vào cơ sở.
3. Xác định $\theta = \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\}$.

1. Chọn s sao cho $\Delta_s = \max\{\Delta_j : j \notin J_o\}$.
2. Đưa vectơ A_s vào cơ sở.
3. Xác định $\theta = \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\}$.
4. Chọn r sao cho $\theta = \frac{x_r^o}{a_{sr}}$.

1. Chọn s sao cho $\Delta_s = \max\{\Delta_j : j \notin J_o\}$.
2. Đưa vectơ A_s vào cơ sở.
3. Xác định $\theta = \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\}$.
4. Chọn r sao cho $\theta = \frac{x_r^o}{a_{sr}}$.
5. Loại vectơ A_r ra khỏi cơ sở.

NỘI DUNG THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH

1. Chọn s sao cho $\Delta_s = \max\{\Delta_j : j \notin J_o\}$.
2. Đưa vectơ A_s vào cơ sở.
3. Xác định $\theta = \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\}$.
4. Chọn r sao cho $\theta = \frac{x_r^o}{a_{sr}}$.
5. Loại vectơ A_r ra khỏi cơ sở.
6. Cơ sở mới là $J_1 = \{A_i : i \in J_o, i \neq r\} \cup A_s$.

1. Chọn s sao cho $\Delta_s = \max\{\Delta_j : j \notin J_o\}$.
2. Đưa vectơ A_s vào cơ sở.
3. Xác định $\theta = \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\}$.
4. Chọn r sao cho $\theta = \frac{x_r^o}{a_{sr}}$.
5. Loại vectơ A_r ra khỏi cơ sở.
6. Cơ sở mới là $J_1 = \{A_i : i \in J_o, i \neq r\} \cup A_s$.
7. Thay PACB x_o bằng PACB x^1 như sau:

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_1 \\ \theta & \text{nếu } j = s \\ x_j^o - \theta \times a_{sj} & \text{nếu } j \in J_o \end{cases}$$

Example

Cho bài toán QHTT

$$f(x) = \begin{array}{l} x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{array}$$

1. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PACB?
2. Xác định biến cơ sở, cơ sở.
3. x^o là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

Example

Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

1. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PACB?
2. Xác định biến cơ sở, cơ sở.
3. x^o là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \sum_{i \in J} a_{ji} c_i - c_j \\ \Delta_s &= \max\{\Delta_j : j \notin J_o\} \\ \theta &= \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{is} > 0\right\} \\ \theta &= \frac{x_r^o}{a_{rs}} \end{aligned}$$

$$J_1 = \{A_i : i \in J_o, i \neq r\} \cup A_s$$

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_1 \\ \theta & \text{nếu } j = s \\ x_j^o - \theta \times a_{sj} & \text{nếu } j \in J_o \end{cases}$$

THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH - VÍ DỤ

Example

Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

1. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PACB?
2. Xác định biến cơ sở, cơ sở.
3. x^o là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

Example

Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

1. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PACB?
2. Xác định biến cơ sở, cơ sở.
3. x^o là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

2. Biến cơ sở x_1, x_2. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Example

Cho bài toán QHTT

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\
& x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\
& x_i \geq 0 \text{ với mọi } i.
\end{aligned}
$$

1. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PACB?
2. Xác định biến cơ sở, cơ sở.
3. x^o là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

2. Biến cơ sở x_1, x_2. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
3. $A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3A_1 + A_2,$

Example

Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

1. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PACB?
2. Xác định biến cơ sở, cơ sở.
3. x^o là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

2. Biến cơ sở x_1, x_2. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
3. $A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3A_1 + A_2,\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -A_1 + A_2.$

Example

Cho bài toán QHTT

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

1. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PACB?
2. Xác định biến cơ sở, cơ sở.
3. x^o là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

2. Biến cơ sở x_1, x_2. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
3. $A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3A_1 + A_2,\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = -A_1 + A_2.$

$$\Rightarrow a_{31} = 3, a_{32} = 1, a_{41} = -1, a_{42} = 1.$$

Example

$$f(x) = \begin{array}{l} x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{array}$$

3. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

3. $a_{31} = 3, a_{32} = 1, a_{41} = -1, a_{42} = 1.$

THUẬT TOÁN ĐƠN HÌNH - VÍ DỤ

Example

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\
& x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\
& x_i \geq 0 \text{ với mọi } i.
\end{aligned}
$$

3. $x^o = (1,1,0,0)$ là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

3. $a_{31} = 3, a_{32} = 1, a_{41} = -1, a_{42} = 1$. Suy ra

$$\Delta_3 \quad = a_{31}c_1 + a_{32}c_2 - c_3 \quad = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8 - 10 = 1$$

Example

$$f(x) = \begin{array}{l} x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{array}$$

3. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

3. $a_{31} = 3, a_{32} = 1, a_{41} = -1, a_{42} = 1$. Suy ra

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_{31}c_1 + a_{32}c_2 - c_3 &&= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8 - 10 = 1 \\ \Delta_4 &= a_{41}c_1 + a_{42}c_2 - c_4 &&= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 8 - 0 = 7 \end{aligned}$$

Example

$$f(x) = \begin{aligned} & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

3. $x^o = (1, 1, 0, 0)$ là PA tối ưu?
4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

3. $a_{31} = 3, a_{32} = 1, a_{41} = -1, a_{42} = 1$. Suy ra

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_{31}c_1 + a_{32}c_2 - c_3 &&= 3 \cdot 1 + 1 \cdot 8 - 10 = 1 \\ \Delta_4 &= a_{41}c_1 + a_{42}c_2 - c_4 &&= (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 8 - 0 = 7 \end{aligned}$$

Kết luận: PACB x^o không phải là PA tối ưu.

Example

$$f(x) = \begin{aligned} & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. Do $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ và với mỗi $j = 3$ hay $j = 4$ đều tồn tại $a_{ji} > 0$ (cụ thể là a_{31} và a_{42}). Nên ta suy ra PACB có thể cải tiến được.

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. Do $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ và với mỗi $j = 3$ hay $j = 4$ đều tồn tại $a_{ji} > 0$ (cụ thể là a_{31} và a_{42}). Nên ta suy ra PACB có thể cải tiến được.

$$\Delta_s = \quad \max\{\Delta_3, \Delta_4\} = \Delta_4, \text{ suy ra } s = 4.$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. Do $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ và với mỗi $j = 3$ hay $j = 4$ đều tồn tại $a_{ji} > 0$ (cụ thể là a_{31} và a_{42}). Nên ta suy ra PACB có thể cải tiến được.

$$\begin{aligned} \Delta_s = \quad & \max\{\Delta_3, \Delta_4\} = \Delta_4, \text{ suy ra } s = 4. \\ \theta = \quad & \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\} \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. Do $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ và với mỗi $j = 3$ hay $j = 4$ đều tồn tại $a_{ji} > 0$ (cụ thể là a_{31} và a_{42}). Nên ta suy ra PACB có thể cải tiến được.

$$\begin{aligned} \Delta_s = \quad & \max\{\Delta_3, \Delta_4\} = \Delta_4, \text{ suy ra } s = 4. \\ \theta = \quad & \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\} = \min\left\{\frac{x_2^o}{a_{42}}\right\} \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. Do $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ và với mỗi $j = 3$ hay $j = 4$ đều tồn tại $a_{ji} > 0$ (cụ thể là a_{31} và a_{42}). Nên ta suy ra PACB có thể cải tiến được.

$$\begin{aligned} \Delta_s = \quad & \max\{\Delta_3, \Delta_4\} = \Delta_4, \text{ suy ra } s = 4. \\ \theta = \quad & \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\} = \min\left\{\frac{x_2^o}{a_{42}}\right\} = \min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. Do $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ và với mỗi $j = 3$ hay $j = 4$ đều tồn tại $a_{ji} > 0$ (cụ thể là a_{31} và a_{42}). Nên ta suy ra PACB có thể cải tiến được.

$$\begin{aligned} \Delta_s = \quad & \max\{\Delta_3, \Delta_4\} = \Delta_4, \text{ suy ra } s = 4. \\ \theta = \quad & \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\} = \min\left\{\frac{x_2^o}{a_{42}}\right\} = \min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1 \\ r = \quad & 2 \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. Do $\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ và với mỗi $j = 3$ hay $j = 4$ đều tồn tại $a_{ji} > 0$ (cụ thể là a_{31} và a_{42}). Nên ta suy ra PACB có thể cải tiến được.

$$\begin{aligned} \Delta_s = \quad & \max\{\Delta_3, \Delta_4\} = \Delta_4, \text{ suy ra } s = 4. \\ \theta = \quad & \min\left\{\frac{x_i^o}{a_{si}} : i \in J_o, a_{si} > 0\right\} = \min\left\{\frac{x_2^o}{a_{42}}\right\} = \min\left\{\frac{1}{1}\right\} = 1 \\ r = \quad & 2 \end{aligned}$$

Như vậy ta loại vectơ A_2 và thêm vào vectơ A_4 để được cơ sở mới là

$$J_1 = \{A_1, A_4\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

Example

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\
& x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\
& x_i \geq 0 \text{ với mọi } i.
\end{aligned}
$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. $r = 2, s = 4, \theta = 1.$

$$J_1 = \{A_1, A_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_1 \\ \theta & \text{nếu } j = s \\ x_j^o - \theta \times a_{sj} & \text{nếu } j \in J_o \end{cases}$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. $r = 2, s = 4, \theta = 1.$

$$J_1 = \{A_1, A_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_1 \\ \theta & \text{nếu } j = s \\ x_j^o - \theta \times a_{sj} & \text{nếu } j \in J_o \end{cases}$$

$$x_1^1 \quad = x_1^o - \theta a_{41} = 1 - 1 \cdot (-1) = 2$$

Example

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\
& x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\
& x_i \geq 0 \text{ với mọi } i.
\end{aligned}
$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. $r = 2, s = 4, \theta = 1.$

$$J_1 = \{A_1, A_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_1 \\ \theta & \text{nếu } j = s \\ x_j^o - \theta \times a_{sj} & \text{nếu } j \in J_o \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= x_1^o - \theta a_{41} = 1 - 1 \cdot (-1) = 2 \\
x_2^1 &= 0
\end{aligned}
$$

Example

$$f(x) = \begin{array}{l} x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{array}$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. $r = 2, s = 4, \theta = 1.$

$$J_1 = \{A_1, A_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_1 \\ \theta & \text{nếu } j = s \\ x_j^o - \theta \times a_{sj} & \text{nếu } j \in J_o \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^o - \theta a_{41} = 1 - 1 \cdot (-1) = 2 \\ x_2^1 &= 0 \\ x_3^1 &= 0 \end{aligned}$$

Example

$$f(x) = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$$
$x_i \geq 0$ với mọi i.

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. $r = 2, s = 4, \theta = 1.$

$$J_1 = \{A_1, A_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_1 \\ \theta & \text{nếu } j = s \\ x_j^o - \theta \times a_{sj} & \text{nếu } j \in J_o \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^o - \theta a_{41} = 1 - 1 \cdot (-1) = 2 \\ x_2^1 &= 0 \\ x_3^1 &= 0 \\ x_4^1 &= \theta = 1 \end{aligned}$$

Example

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\
& x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\
& x_i \geq 0 \text{ với mọi } i.
\end{aligned}
$$

4. Tìm một PACB tốt hơn.
5. PA tốt hơn là PA tối ưu?

4. $r = 2, s = 4, \theta = 1.$

$$J_1 = \{A_1, A_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$x_j^1 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } j \notin J_1 \\ \theta & \text{nếu } j = s \\ x_j^o - \theta \times a_{sj} & \text{nếu } j \in J_o \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= x_1^o - \theta a_{41} = 1 - 1 \cdot (-1) = 2 \\
x_2^1 &= 0 \\
x_3^1 &= 0 \\
x_4^1 &= \theta = 1
\end{aligned}
$$

PACB mới tốt hơn:

$$x^1 = (2, 0, 0, 1).$$

Example

$$f(x) = \quad x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_i \geq 0 \text{ với mọi } i.$$

5. PACB $x^1 = (2, 0, 0, 1)$ có phải là PA tối ưu?

5. Biến cơ sở mới x_1, x_4. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

Example

$$f(x) = \begin{array}{l} x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{array}$$

5. PACB $x^1 = (2, 0, 0, 1)$ có phải là PA tối ưu?

5. Biến cơ sở mới x_1, x_4. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Example

$$
\begin{aligned}
f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\
& x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\
& x_i \geq 0 \text{ với mọi } i.
\end{aligned}
$$

5. PACB $x^1 = (2, 0, 0, 1)$ có phải là PA tối ưu?

5. Biến cơ sở mới x_1, x_4. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A_1 + A_4,$$

Example

$$f(x) = \begin{array}{l} x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{array}$$

5. PACB $x^1 = (2, 0, 0, 1)$ có phải là PA tối ưu?

5. Biến cơ sở mới x_1, x_4. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A_1 + A_4, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4A_1 + A_4.$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

5. PACB $x^1 = (2, 0, 0, 1)$ có phải là PA tối ưu?

5. Biến cơ sở mới x_1, x_4. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\begin{aligned} & A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A_1 + A_4, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4A_1 + A_4. \\ \Rightarrow \quad & a_{21} = a_{24} = 1, a_{31} = 4, a_{34} = 1. \end{aligned}$$

Example

$$f(x) = \quad x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 = 2$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0$$
$$x_i \geq 0 \text{ với mọi } i.$$

5. PACB $x^1 = (2, 0, 0, 1)$ có phải là PA tối ưu?

5. Biến cơ sở mới x_1, x_4. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A_1 + A_4, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4A_1 + A_4.$$
$$\Rightarrow \quad a_{21} = a_{24} = 1, a_{31} = 4, a_{34} = 1.$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \Delta_2 = a_{21}c_1 + a_{24}c_4 - c_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 8 = -7 \\ \end{cases}$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

5. PACB $x^1 = (2, 0, 0, 1)$ có phải là PA tối ưu?

5. Biến cơ sở mới x_1, x_4. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\begin{aligned} & A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A_1 + A_4, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4A_1 + A_4. \\ \Rightarrow \quad & a_{21} = a_{24} = 1, a_{31} = 4, a_{34} = 1. \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} \Delta_2 = a_{21}c_1 + a_{24}c_4 - c_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 8 = -7 \\ \Delta_3 = a_{31}c_1 + a_{34}c_4 - c_3 = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 10 = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Example

$$\begin{aligned} f(x) = \quad & x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \min \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ & x_i \geq 0 \text{ với mọi } i. \end{aligned}$$

5. PACB $x^1 = (2, 0, 0, 1)$ có phải là PA tối ưu?

5. Biến cơ sở mới x_1, x_4. Vectơ cơ sở là $\left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

$$\begin{aligned} & A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = A_1 + A_4, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 4A_1 + A_4. \\ \Rightarrow \quad & a_{21} = a_{24} = 1, a_{31} = 4, a_{34} = 1. \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} \Delta_2 = a_{21}c_1 + a_{24}c_4 - c_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 8 = -7 \\ \Delta_3 = a_{31}c_1 + a_{34}c_4 - c_3 = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 10 = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết luận: PACB đã cho là PA tối ưu. Hơn nữa, PA tối ưu này còn là PA tối ưu duy nhất.

Thank you

Thank you!